管理类专业学位联考

数学辅导

关于条件充分性判断题目的几点说明：

1. **充分性命题定义**

对于两个命题A和B而言，若由命题A成立，肯定可以推出命题B也成立，则称命题A是命题B成立的充分条件，或称命题B是命题A成立的必要条件。

【注意】A是B的充分条件可以简单地理解为：有A必有B，无A时B不定。

2. **解题说明与各选项含义**

本类题要求判断给出的条件（1）和（2）能否充分支持题干所陈述的结论，即只要分析条件是否充分即可，而不要考虑条件是否必要。阅读条件（1）和（2）后选择：

（A）条件（1）充分，但条件（2）不充分

（B）条件（2）充分，但条件（1）不充分

（C）条件（1）和（2）单独不充分，但条件（1）和（2）联合起来充分

（D）条件（1）充分，条件（2）也充分

（E）条件（1）和（2）单独不充分，但条件（1）和（2）联合起来也不充分

3. **图示描述**

（1）√（2）×（A）

（1）×（2）√（B）

（1）×（2）×（1）（2）联合√（C）

（1）√（2）√（D）

（1）×（2）×（1）（2）联合×（E）

4. 常用的解题方法

（1）直接定义分析法(即由A推导B)

若由A推导出B,则A是B的充分条件；若由A推导出与B矛盾的结论，则A不是B的充分条件。直接定义分析法是解条件充分性判断题的最基本的解法。

（2）题干等价推导法（寻找题干结论的充分必要条件）

要判断A是否是B的充分条件，先找出B等价的充要条件C，再判断A是否是C的充分条件。

（3）特殊反例法

由条件中的特殊值或条件的特殊情况入手，导出与题干矛盾的结论，从而得出条件不充分的选择。

【注意】该方法不能用在肯定性的判断上。

第 1 章　算　术

【大纲考点】实数的概念、性质、运算及应用。

【备考要点】这部分看似简单，但题目往往设有陷阱，容易出错，解题过程中需更加细心。

1.1 数的概念、性质与运算

1 实数的概念与性质

（1）整数

自然数 N：$0,1,2,\Lambda$；

整数 Z：$\Lambda,-2,-1,0,1,2,\Lambda$；

分数：把 1 分成 q 等份，表示其中 p 份的数，称为分数,记为 $\frac{p}{q}$，其中 q 表示分母，p 表示分子，读为 q 分之 p。

当 $q>p$ 时，$\frac{p}{q}$ 称为真分数，如 $\frac{2}{3},\frac{7}{9}$；

当 $q\le p$ 时，$\frac{p}{q}$ 称为假分数，如 $\frac{5}{3},\frac{11}{9}$；

由一个整数和一个真分数合成的数称为带分数，$1\frac{2}{3},3\frac{7}{8}$。

分母为 100 的分数称为百分数，记为 $x\%$。

整除：　$\frac{p}{q}=k$，p,q,k 均为整数。

这里 q 称为 p 的约数，p 称为 q 的倍数。

若 $\frac{p}{q_1}=k_1$，$\frac{p}{q_2}=k_2$，则称 p 为 q_1,q_2 的公倍数，一般我们感兴趣最小公倍数;若 $\frac{p_1}{q}=k_1$，$\frac{p_2}{q}=k_2$，则称 q 为 p_1,p_2 的公约数，一般我们关心

最大公约数。我们可以把两个数的公倍数与公约数的概念推广到若干个数的情形。

互质数：公约数只有 **1** 的两个数称为互质数。

奇数：不能被 **2** 整除的数；偶数：能被 **2** 整除的数。注意，**0** 是偶数。

质数（素数）：只有 **1** 和本身两个约数；注意，**2** 是唯一的既是质数又是偶数的整数，**2** 是最小的质数，大于 **2** 的质数必为奇数。

合数：（非质数，约数大于 **2**），合数是若干个质因数的乘积。**4** 是最小的合数。

分数的分子、分母同乘或同除以一个非零数，其值不变，即

$$\frac{p}{q}=\frac{p\times a}{q\times a}=\frac{p\div a}{q\div a}，\quad a\neq 0。$$

由此，把一个分数化为与它等值，但分子、分母都较小的分数，称为约分。根据上述性质，可以把分数化为 p,q 互为质数，此时 $\frac{p}{q}$ 称为最简分数。

（**2**）有理数与无理数

任何可表为形如 $\frac{p}{q}$（其中 p,q 为整数，$q\neq 0$）的数称为有理数。正整数，负整数，正分数，负分数和零，统称有理数。有理数可表示为有限小数或无限循环小数。

不能用有理数表示的数，称为无理数。如 $\sqrt{2}$，π，e 等。

释例：证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。

反证法：设有分数 $\frac{p}{q}$，这里 p,q 互质，满足 $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$，于是 $p^2=2q^2$，

故 p 为偶数；令 $p=2r$，代入上式得 $4r^2=2q^2 \Rightarrow q^2=2r^2$，于是 q 亦为偶数，这与 p,q 互质矛盾。

（3）实数：实数=有理数+无理数（无限不循环小数）。通常用 R 表示。

实数与数轴上的点可建立一一对应关系。实数 x 既可称作数 x，也可称为数轴上的点 x。

实数的有序性：即若 a,b 是任意两个实数，则必有 $a>b$，或 $a<b$，或 $a=b$。

1.2 数的分类

按有理数、无理数分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{array}\right.\\ 0\\ \text{负有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{array}\right.\end{array}\right\}\text{有限小数,无限循环小数}\\ \text{无理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{array}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

按性质符号分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\left\{\begin{array}{l}\text{正有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{array}\right.\\ \text{正无理数}\end{array}\right.\\ 0\\ \text{负实数}\left\{\begin{array}{l}\text{负有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{array}\right.\\ \text{负无理数}\end{array}\right.\end{cases}$$

1.3 实数的运算

实数的四则运算（加、减、乘、除）

加法满足交换律和结合律；减法是加法的逆运算。

$$a+b=b+a,\quad a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c,\quad a-b=a+(-b)。$$

乘法满足交换律、结合律和分配律；除法是乘法的逆运算。

$a\times b=b\times a$， $a\times b\times c=a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$。 $a\div b=a\times\left(\frac{1}{b}\right),b\neq 0$。

加法与乘法满足分配律。

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c，\ (a+b)\times c=a\times c+b\times c。$$

实数的乘方与开方运算

乘方运算： $a^n=a\times a\times\Lambda\times a$， $a^0=1$， $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$；

开方运算： $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，这里若 n 为偶数，则要求 $a>0$。

一般的 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，这里要求运算有意义。

例 1.1 请你想好一个数，将它加 5，将其结果乘以 2，再减去 4，将其结果除以 2，再减去你想好的那个数，最后的结果等于 $[E]$。

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2　　E. 3

解： $\frac{(x+5)\times 2-4}{2}-x=(x+5)-2-x=3$。

1.4 绝对值

正数的绝对值是其本身，负数的绝对值是其相反数，零的绝对值还是零。

$$|a|=\begin{cases} a,\ a\geq 0 \\ -a, a<0 \end{cases}。$$

绝对值的性质

（**1**）对称性 $|-a|=|a|$；

（**2**）等价性 $\sqrt{a^2}=|a|$， $|a|^2=a^2$；

（3）自比性　$-|a|\le a\le|a| \Rightarrow \frac{|x|}{x}=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$；

（4）非负性　$|a|\ge 0$；

【常见考点】若干个非负性质的数之和为零时，则每个非负数均为零。

（5）$|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b| \Rightarrow |a|-|b|\le|a-b|\le|a|+|b|$

由 $(|a|-|b|)^2=|a+b|^2=(a+b)^2 \Rightarrow -|a||b|=ab$，故 $|a|-|b|=|a+b|$ 等价于 $ab\le 0$ 且 $|a|\ge|b|$；

由 $(|a|+|b|)^2=|a+b|^2=(a+b)^2 \Rightarrow |a||b|=ab$，故 $|a|+|b|=|a+b|$ 等价于 $ab\ge 0$；

$|a|-|b|=|a-b|$ 等价于 $ab\ge 0$ 且 $|a|\ge|b|$。

【常见考点】等号成立时的条件。

1.5 比和比例

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a:b=c:d$。

若 $0<a<b,c>0$，则 $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$。此因 $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{c(a-b)}{b(b+c)}<0$。

正比例关系一两个数的比值一定 $(\frac{p}{q}=k)$；反比例关系一两个数的乘积一定 $(pq=k)$。

比例的几个重要定理

（1）更比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$；

（2）反比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$；

（3）合比定理　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$；

（4）分比定理 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$；

（5）合分比定理 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a\pm mc}{b\pm md}$；

（6）等比定理 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$。

1.6 平均值

算术平均值

设 n 个数 a_1,a_2,Λ,a_n，称 $\bar{x}=\frac{a_1+a_2+\Lambda\ a_n}{n}$ 为这 n 个数的算术平均值，

几何平均值

设 n 个正数 a_1,a_2,Λ,a_n，称 $x_g=\sqrt[n]{a_1a_2\Lambda\ a_n}$ 为这 n 个正数的几何平均值。

关于算术平均与几何平均的基本不等式

（1）对一切 $a,b\in R$，有 $a^2+b^2\geq 2ab$，$a^2+b^2=2ab\Leftrightarrow a=b$；

（2）对任意 $a\geq 0$，$b\geq 0$，有 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$，$a+b=2\sqrt{ab}\Leftrightarrow a=b$；

（1）的证明：$(a-b)^2\geq 0\Rightarrow a^2+b^2\geq 2ab$。

在（2）中，取 $\frac{1}{a}>0$，$\frac{1}{b}>0$，可得调和平均不等式

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}\Rightarrow\sqrt{ab}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},$$

事实上，对任意正整数 $n(n>1)$，若 $a_i>0(i=1,2,\Lambda,n)$，则调和平均、几何平均和算术平均成立如下的不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\Lambda+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\Lambda\ a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\Lambda+a_n}{n}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\Lambda=a_n$ 时，等号成立。

1.7 题型归纳

【题型 1】考察质数、合数、奇数、偶数、最小公倍数等性质

【提示】掌握并灵活应用这些性质

例 1.2 记不超过 10 的素数的算术平均数为M，则与M最接近的整数是（）。

（A） 2　　（B） 3　　（C） 4　　（D） 5　　（E） 6

解：不超过 10 的素数为 2，3，5，7，（注意 1 不是素数）

$M=\frac{2+3+5+7}{4}=4\frac{1}{4}$，故选 C。

例 1.3 某人左右两手分别握了若干枚石子，左手中的石子数乘 3 加上右手中的石子数乘 4 之和为 29，则右手中的石子数为（）

（A）奇数　　（B）偶数　　（C）质数　　（D）合数

（E）以上结论均不正确

解：由左×3＋右×4＝29，得右＝（29－左×3）÷4 为整数，必左手的数字为 3 或 7 时，才能整除，故右手的数字为 5 或 2，均为质数，选 C。

例 1.4 一班同学围成一圈，每位同学的一侧是一位同性同学，另一侧是两位异性同学，则这班的同学人数（）

（A）一定是 4 的倍数　（B）不一定是 4 的倍数

（C）一定不是 4 的倍数（D）一定是 2 的倍数，不一定是 4 的倍数

（E）以上结论均不正确

解：根据题意得到同学的排列规律：…男男女女男男女女…，即有偶

数个男生和偶数个女生，且男生女生人数相当，自然选Ａ。

例 1.5 在一条 3600m 的公路一边，从一端开始等距竖立电线杆，每隔 40m 原已挖好一个坑，现改为每隔 60m 立一根电线杆，则需重新挖坑和填坑的个数分别是[ ]。

A．50和40　　B．40和50　　C．60和30　　D．30和60　　E．50和50

解：$3600 \div 40 = 90$；$3600 \div 60 = 60$。

注意头尾均需竖立电线杆，则原需竖立电线杆 91 根，现需竖立电线杆 61 根。

40 与 60 的最小公倍数是 120，则在每 120m 的区间内，原已有 0m 处，40m 处，80m 处，120m 处各一个坑，现需改为 0m 处，60m 处，120m 处各一个坑，则需要重新挖一个坑和填两个坑，分析至此，对照五个答案，选 D 即可。进一步 $3600 \div 120 = 30$，则挖坑数为$30 \times 1 = 30$，填坑数为$30 \times 2 = 60$。

若改为植树或树广告牌等需公路两边都要做的问题，则数目通常要乘以 2。

【题型 2】考察数的整除

【提示】数的除法一般要涉及余数问题，当余数为零时，就称为整除。

例 1.6 某校有若干女生住校，若每间房住 4 人，则还剩 20 人未住下，若每间房住 8 人，则仅有一间未住满，那么该校原安排女生房间数为（）。

A．4　　B．5　　C．6　　D．7　　E．8

解：设原安排女生房间数为x，依题意

$$4x+20>8(x-1)+1\Rightarrow x<7；\quad 4x+20<8x\Rightarrow x>5。$$

当然$5<x<7$，只能选 C。

例 1.7 若n是一个大于 100 的正整数，则n^3-n一定有约数（）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8　　E．9

解：$n^3-n=(n-1)n(n+1)$，连续两个数相乘，一定可以被$2!$整除，连续三个数相乘，一定可以被$3!$整除，所以n^3-n一定有约数$3!=6$，选 B。

例 1.8　9121 除以某质数，余数得 13，这个质数是（）

A．7　　B．11　　C．17　　D．23　　E．19

解：$9121-13=9108=2^2\times3^2\times11\times23$，所求质数要大于余数 13，必取 D。

【题型 3】计算含绝对值代数式的值

【提示】掌握去绝对值符号的三种方法(1)确定绝对值符号内式子的符号，根据绝对值定义去掉绝对值符号；(2) 利用平方法去掉绝对值符号；(3)根据绝对值的几何意义去掉绝对值符号。

例 1.9 实数a,b,c在数轴上的位置如题 7 图所示，其中O为原点，则代数式$|a+b|-|b-a|+|a-c|+c=$[ ]。

A．$-3a+2c$　B．$-a-ab-2c$　C．$a-2b$　D．$3a$　E．$a+b+c$

解：$|a+b|-|b-a|+|a-c|+c=-(a+b)-(a-b)+(c-a)+c=-3a+2c$，选 A。

例 1.10（2003.10）可以确定$\dfrac{|x+y|}{x-y}=2$。

（1）$\dfrac{x}{y}=3$　　（2）$\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{3}$

解：（1）$\frac{x}{y}=3\Rightarrow\begin{cases}y\neq 0,\\x=3y.\end{cases}\Rightarrow\frac{|x+y|}{x-y}=\frac{|4y|}{2y}=\begin{cases}2,\ y>0\\-2.\ y<0\end{cases}$，不充分；

（2）$\frac{x}{y}=\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}y\neq 0,\\y=3x.\end{cases}\Rightarrow\frac{|x+y|}{x-y}=\frac{|4x|}{-2x}=\begin{cases}-2,x>0\\2.\ x<0\end{cases}$，不充分。

（1）（2）联合时，$3=\frac{x}{y}=\frac{1}{3}$不能成立，选 E。

【题型 4】考察绝对值的非负性质

【提示】(1) 有限个非负数（式子）之和为零，则其中每个非负数（式子）必为零；(2) 有限个非负数（式子）之和仍为非负。

例 1.11 已知$|x-y+1|+(2x-y)^2=0$，那么$\log_y x=$（）

A．1　　B．0　　C．5　　D．16　　E．7

解：根据非负性，$\begin{cases}x-y+1=0,\\2x-y=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}\Rightarrow\log_2 1=0$，选 B。

例 1.12 设x,y,z满足条件$\left|x^2+4xy+5y^2\right|+\sqrt{z+\frac{1}{2}}=-2y-1$，

则$(4x-10y)^z=$（）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{6}$　　D．2　　E．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

解：先将等式变形

$$\left|x^2+4xy+5y^2\right|+\sqrt{z+\frac{1}{2}}+2y+1=\left|(x+2y)^2+y^2\right|+\sqrt{z+\frac{1}{2}}+2y+1$$

$$=(x+2y)^2+\sqrt{z+\frac{1}{2}}+y^2+2y+1=(x+2y)^2+\sqrt{z+\frac{1}{2}}+(y+1)^2=0,$$

所以$z=-\frac{1}{2},y=-1,x=-2y=2$，$(4x-10y)^z=(8+10)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$，选 C。

例 1.13（2001.10）已知$\sqrt{x^3+2x^2}=-x\sqrt{x+2}$，则的取值范围是（）。

A．$x<0$　　B．$x\geq 2$　　C．$-2\leq x\leq 0$　　D．$-2<x<0$　　E.无法确定

解：$\sqrt{x^3+2x^2}=\sqrt{x^2(x+2)}=|x|\sqrt{x+2}=-x\sqrt{x+2}$，则必 $x\le 0$ 和 $x+2\ge 0$（后一不等式为平方根有意义，容易忽略）。选 C。

例 1.14（2004.10）$\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$。

（1）$a>0,b<0$；　（2）$a<0,b>0$。

解：欲使 $\sqrt{a^2b}$ 有意义，必 $b>0$，又 $\sqrt{a^2}=|a|=-a$，则 $a\le 0$，故（2）是充分条件。选 B。

【题型 5】考察三角不等式的应用

【提示】根据三角不等式 $|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$ 进行分析解题是每年考试的难点与热点，处理方法可以从绝对值的运算法则与性质入手，同时注意三角不等式可以推广到有限个实数之和的绝对值不大于它们的绝对值之和。

例 1.15 $|y-a|\le 2$ 成立。

（1）$|2x-a|\le 1$；（2）$|2x-y|\le 1$。

解：$|y-a|=|y-2x+2x-a|\le|y-2x|+|2x-a|\le 1+1=2$，选 C。

例 1.16 已知 $|a-1|=3$，$|b|=4$，$b>ab$，则 $|(a-1)-b|=$（b）。

A．1　　B．7　　C．5　　D．16　　E．3

解：由 $b>ab$ 得 $(a-1)b<0$，则 $|(a-1)-b|=|a-1|+|b|=3+4=7$，选 B。

例 1.17 已知 $x\in[2,5]$，$|a|=5-x$，$|b|=x-2$，则 $|b-a|$ 的取值范围是（e）。

A．$[-3,5]$　　B．$[0,5]$　　C．$[1,3]$　　D．$[3,5]$　　E．$[0,3]$

解：由 $|b-a|\le|a|+|b|=5-x+x-2=3$，又令 $|a|=5-x=x-2=|b|\Rightarrow x=3.5$，所以此时 $|b-a|=0$，选 E。

【题型 6】一般比例式的计算

【提示】比与比例问题在考试中占有一定的比例,处理此类问题的技巧是设比例系数.

例 1.18(2002.1)若$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=k$,则$k$的值等于(a)

b

A. 1　　B. 1 或 -2　　C. -1 或 2　　D. -2　　E. 1 或 2

解：由合分比定理

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a+b+c}{c+b+a}=1=k(a+b+c\neq 0),$$

当然 若$a+b+c=0$，则$\frac{a+b-c}{c}=\frac{-2c}{c}=-2=k$，选 B。

例 1.19 甲、乙两种茶叶以$x:y$（重量比）混合配制成一种成品茶，甲种茶$50元/kg$，乙种茶$40元/kg$。现甲种茶价格上涨10%，乙种茶价格下降10%后，成品茶的价格恰好保持不变，则$x:y$等于[ ]。c

A. $1:1$　　B. $5:4$　　C. $4:5$　　D. $5:6$　　E. $6:5$

解：两种茶叶价格变化前后成品茶价格的变化应为

$(50\frac{x}{x+y}+40\frac{y}{x+y})元/kg$与$(50\times 110\%\frac{x}{x+y}+40\times 90\%\frac{y}{x+y}元)/kg$，现成品茶的价格保持不变得 $50\frac{x}{y}+40=55\frac{x}{y}+36\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$。选 C。

例 1.20(2002.1)设$\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}=4:5:6$，则使$x+y+z=74$成立的$y$值是（a)。

A. 24　　B. 36　　C. $\frac{74}{3}$　　D. $\frac{37}{2}$　　E. 20

解：设$\frac{\frac{1}{x}}{4}=\frac{\frac{1}{y}}{5}=\frac{\frac{1}{z}}{6}=k$，则$x=\frac{1}{4k},y=\frac{1}{5k},z=\frac{1}{6k}$，代入$x+y+z=74$，

解得$k=\frac{1}{120}\Rightarrow y=24$，选 A。

【题型 7】求含有分式函数的最值问题

【提示】先验证给定函数是否满足最值三条件（1）各项均为正；（2）乘积（或和）为定值；（3）等号能否取到，然后利用平均值公式求出最值。

例 1.21 求函数$y=3x+\frac{4}{x^2}(x>0)$的最小值。

解：$y=\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{4}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2}\bullet\frac{3x}{2}\bullet\frac{4}{x^2}}=3\sqrt[3]{9}$，所以当$\frac{3x}{2}=\frac{4}{x^2}\Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$时，取得最小值 $y=3\sqrt[3]{9}$。

例 1.22 已知$x,y\in R$，且$x+y=4$，则3^x+3^y的最小值为（b）。

A. $3\sqrt{2}$　　B. 18　　C. 9　　D. $2\sqrt{2}$　　E. $\sqrt{6}$

解：$3^x+3^y\geq 2\sqrt{3^{x+y}}=2\sqrt{3^4}=18$，选 B。

例 1.23 若$x>0,y>0$，且$x+2y=4$，则$\lg x+\lg y$的最大值是（a）。

A. $\lg 2$　　B. $2\lg 2$　　C. $\frac{1}{2}\lg 2$　　D. $3\lg 2$　　E. $\lg 3$

解：根据 $4=x+2y\geq 2\sqrt{2xy}\Rightarrow\sqrt{2}\geq\sqrt{xy}\Rightarrow xy\leq 2$，

所以 $\lg x+\lg y=\lg xy\leq\ln 2$，选 A。

【题型 8】考察平均值的定义与性质。

例 1.24 五个不同的数，两两之和依次等于 3，4，5，6，7，8，11，12，13，15，这五个数的平均值是$[D]$。

A． 18.8　　B． 8.4　　C． 5.6　　D． 4.2　　E． 3.8

解：两两之和意即每个数用了 4 次，五个数的平均值为

$$\frac{3+4+5+6+7+8+11+12+13+15}{4\times 5}=4.2\text{。}$$

1.8 常见应用题型

一． 打折问题

【提示】首先选准基准量，注意折扣的变化与利润的关系。

例 1.25 某工厂产值三月份比二月份增加 10%，四月份比三月份减少 10%，那么(d)。

A．四月份与二月份产值相等　　B．四月份比二月份产值增加$\frac{1}{99}$

C．四月份比二月份产值减少$\frac{1}{99}$　D．四月份比二月份产值减少$\frac{1}{100}$

E.以上结果都不对

解：根据题意二、三、四月份产值依次为x，$1.1x$，$1.1\times 0.9x=0.99x$。

选 D。

例 1.26(1998 考题)一种货币贬值 15%，一年后需增值多少才能保持原币值？E

A.15%　　B. 15.25%　　C. 16.78%　　D. 17.17%　　E. 17.65%

解：设原币值为a，需增值x，则$a(1-15\%)(1+x)=a, x=\frac{15}{85}\approx 17.65\%$。

选 E。

例 1.27（1999 考题）某商店商品按原价提高 50%后，7 折优惠，每售

一套盈利 625 元，其成本 2000 元，问按优惠价售出与按原价售出是多赚钱还是少赚钱？多

解：设原售价为 x，则 $x \bullet (1+50\%) \bullet 0.7 = 2000 + 625 \Rightarrow x = 2500$（元）。

多赚 2625-2500=125（元）。

例 1.28(2004.1)某工厂生产某种新型产品,一月份每件产品销售所得利润是出厂价的 25%(假设利润为出厂价减去成本),二月份每件产品出厂价降低 10%,成本不变, 销售件数比一月份增加 80%,则销售利润比一月份增长(b).

A.6%　　B.8%　　C.15.5%　　D.25.5%　　E.以上结论均不正确

解：无妨设一月份每件产品出厂价为 100，则二月份每件产品出厂价 90，成本同为 75。二月份相对一月份利润是 $(90-75)\times 1.8 = 27$，利润增长 $\frac{27-25}{25} = 0.08 = 8\%$。选 B。

例 1.29（2004.10）A 公司 2003 年 6 月份的产值是 1 月份产值的 a 倍。

（1）在 2003 年上半年，A 公司月产值的月平均增长率为 $\sqrt[5]{a}$；

（2）在 2003 年上半年，A 公司月产值的月平均增长率为 $\sqrt[6]{a}-1$。

解：设月平均增长率为 x，则 $1\times(1+x)^5 = a \Rightarrow x = \sqrt[5]{a}-1$。选 E.

二.　运动问题

【提示】一般利用时间、速度和距离建立方程求解。

例 1.30 甲乙两人沿同一路线骑车(匀速)从 A 区到 B 区,甲需用 30min,乙需用 40min,如果乙比甲早出发 5min 去 B 区,则甲出发后经[ ]min 可以追上乙。 b

A.　10　　B. 15　　C. 20　　D. 25　　E. 30

解：从A区到B区的距离一定，设为S，设甲出发后经$t$min追上乙，则此时两人所骑路程一样。故

$V_{甲}t=V_{乙}(t+5)\Rightarrow\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=\frac{t+5}{t}$，但$S=30V_{甲}=40V_{乙}\Rightarrow\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=\frac{40}{30}$，于是

$\frac{t+5}{t}=\frac{40}{30}\Rightarrow t=15\min$。选B。

例 1.31 假设地球有两颗卫星A、B在各自固定的轨道上绕地球运行，卫星A绕地球一周用$1\frac{4}{5}h$，每经过$144h$，卫星A比卫星B多绕地球 35 周，卫星B绕地球一周用$[C]h$。

A．$2\frac{1}{3}$　　B．$2\frac{2}{3}$　　C．$3\frac{1}{5}$　　D．$3\frac{2}{5}$　　E．$3\frac{3}{5}$

解：设卫星B绕地球一周用时为xh，则由题意

$$\frac{144}{1\frac{4}{5}}=\frac{144}{x}+35\Rightarrow x=3\frac{1}{5}。$$

例 1.32 在一条公路上，汽车A,B,C分别以$80,70,50km/h$的速度匀速行驶，汽车A从甲站开向乙站，同时汽车B,C从乙站出发与汽车A相向而行开向甲站，途中汽车A与汽车B相遇两小时后再与汽车C相遇，那么甲乙两站的距离为[ ]d。

A．$2010km$　　B．$2005km$　　C．$1690km$　　D．$1950km$　　E．$1850km$

解：设甲乙两站的距离为S，则汽车A与汽车B,C相遇时用时为

$\frac{S}{80+70}+2=\frac{S}{80+50}\Rightarrow S=1950(km)$。选 D。

例 1.33（2001.1）两地相距 351km，汽车已行驶了全程的$\frac{1}{9}$，问再行驶多少公里，剩下的路程是已行驶路程的 5 倍？a

A. $19.5km$　　B. $21km$　　C. $21.5km$　　D. $22km$

解：设再行驶$x$km，则$\dfrac{351\times\frac{8}{9}-x}{351\times\frac{1}{9}+x}=5\Rightarrow x=19.5$。选 A。

例 1.33（2004.1）快慢两列车长度分别为 160m 和 120m，它们相向行驶在平行的轨道上，若坐在慢车上的人看见整列快车驶过的时间是 4s，那么快车上的人看见整列慢车驶过的时间是（a）。

A. 3s　　B. 4s　　C. 5s　　D. 6s　　E. 以上结论均不正确

解：相向行驶，速度相加且相同，$V_{快}+V_{慢}=\dfrac{160}{4}=\dfrac{120}{t}\Rightarrow t=3$。选 A。

例 1.35（2004.10）甲、乙两人同时从同一地点出发，相背而行，1 小时后他们分别到达各自的终点 A 和 B。若从原地出发，互换彼此的目的地，则甲在乙到达 A 后 35 分钟到达 B。问甲的速度和乙的速度之比是（d）。

A. 3：5　　B. 4：3　　C. 4：5　　D. 3：4　　E. 以上结论均不正确

解：A 和 B 两地距离为$V_{甲}\times1+V_{乙}\times1$，所以

$\dfrac{V_{甲}\times1}{V_{乙}}=\dfrac{V_{乙}\times1}{V_{甲}}-\dfrac{7}{12}\Rightarrow\dfrac{V_{甲}}{V_{乙}}=\dfrac{3}{4}$。选 D。

三.　溶液浓度问题

【提示】根据溶质守恒来分析浓度的变化。(1)“稀释”问题：加溶剂，溶质不变；(2)“浓缩”问题：减溶剂，溶质不变；(3)“加浓”问题：加溶质，但溶剂不变；(4) 配制问题：两种或两种以上的不同浓度的溶液混合配制成新溶液，需要分析溶质或溶剂的等量关系。

例1.36一个容积为10 L的量杯盛满纯酒精，第一次倒出a L酒精后，用

水将量杯注满并搅拌均匀，第二次仍倒出aL溶液后，再用水将量杯注满并搅拌均匀，此时量杯中的酒精溶液浓度为49％，则每次倒出量a为(b)L。

A. 2.55　　B. 3　　C. 2.45　　D. 4　　E. 4.5

解：列方程，纯酒精的含量不变 $\dfrac{(10-a)-\dfrac{10-a}{10}\times a}{10}=0.49\Rightarrow a=3$ 。

例 1.37 要从含盐 12.5%的盐水 40kg 中蒸去多少 kg 的水分才能制出含盐 20%的盐水？a

A.15　　B.16　　C.17　　D.18　　E. 以上结论均不正确

解：设需蒸去$x$kg 的水分，则$40\times12.5\%=(40-x)\times20\%\Rightarrow x=15$。选 A。

例 1.38 把含盐 5%的盐水与含盐 8%的盐水混合制成含盐 6%的盐水 600kg，分别应取两种盐水各多少 kg。5%的 400kg，8%的 200kg

解：设取含盐 5%的盐水$x$kg，含盐 8%的盐水$y$kg，则

$$\begin{cases} x+y=600, \\ 5\%x+8\%y=6\%\times600. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=400, \\ y=200. \end{cases}。$$

四． 工程（放水）问题

【提示】将整个工程（放水）量看成单位 1，然后根据题目条件按比例求解。

例 1.39 某项工程 8 个人用 35 天完成了全工程量的$\frac{1}{3}$，如果再增加 6 个人，那么完成剩余的工程还需要的天数是[ ]。C

A．18　　B．35　　C．40　　D．50　　E．60

解；工程量剩下$\frac{2}{3}$，改为 14 人做，比较选项中几个数字，C 较恰当。

或设 $\dfrac{\frac{1}{3}}{8\times 35}=\dfrac{\frac{2}{3}}{14\times x}\Rightarrow x=40$。

例 1.40（1999.1）一项工程由甲、乙两队合作 30 天可以完成，甲队单独做 24 天后，乙两队加入，两队合作 10 天后，甲队调走，乙队继续做了 17 天才完成。若这项工程由甲队单独做，则需要（b）天

A．60　　B．70　　C．80　　D．90　　E．100

解：设甲、乙两队各需 x,y 天完成，$\begin{cases}30\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1,\\ 34\times\dfrac{1}{x}+27\times\dfrac{1}{y}=1.\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{70}$，选 B。

例 1.41（2000.1）一艘轮船发生漏水事故，当漏进水 600 桶时，两部抽水机开始排水，甲机每分钟排水 20 桶，乙机每分钟排水 16 桶，经过 50 分钟刚好把水全部排完。每分钟漏进的水有（c）桶

A．12　　B．18　　C．24　　D．30　　E．36

解：设每分钟漏进 x 桶，$600+50x=36\times 50\Rightarrow x=24$。选 C。

例 1.42 一个水池，上部装有若干同样粗细的进水管，底部有一个常开的排水管。当打开 4 个进水管时，需要 4 小时才能注满水池；当打开 3 个进水管时，需要 8 小时才能注满水池，现需要 2 小时内将水池注满，至少需要打开进水管（C）个。

A．8　　B．7　　C．6　　D．5　　E．4

解：设一个进水管效率为 x，排水管效率为 y。

则 $$\begin{cases}4\times 4\times x-4y=1,\\ 3\times 8\times x-8y=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{8},\\ y=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$，

若要 2 小时注满水池，设至少打开 z 个进水管，

$$z\times 2\times\frac{1}{8}-\frac{2}{4}=1\Rightarrow z=6$$，选 C。

五． 平均值（分）问题

【提示】列方程比较简单。

例 1.43（2001.1）某班同学在一次测验中平均成绩为 75 分，其中男同学人数比女同学人数多 80%，而女同学平均成绩比男同学平均成绩高 20%，则女同学平均成绩为（d）。B

A．83 分　　B．84 分　　C．85 分　　D．86 分

解：设男同学平均成绩为 x 分，女同学人数为 y 人，则

$75=\frac{1.2xy+1.8xy}{2.8y}\Rightarrow x=70$，女同学平均成绩：$70\times 1.2=84$。选 B。

例 1.44（2002.1）公司有职工 50 人，理论知识考核平均成绩为 81 分，按成绩将公司职工分为优秀和非优秀两类，优秀职工平均成绩为 90 分，非优秀职工平均成绩为 75 分，则非优秀职工人数为（A）。

A．30 人　　B．25 人　　C．20 人　　D．无法确定

解：设非优秀职工人数为 x 人，则

$81\times 50=75x+90\times(50-x)\Rightarrow x=30$。选 A。

例 1.45（2002.10）甲、乙两组射手打靶，乙组平均成绩为 171.6 环，比甲组平均成绩高出 30%，而甲组人数比乙组人数多 20%，则甲、乙两组射手的总平均成绩是（C）。

A．140 环　　B．145.5 环　　C．150 环　　D．158.5 环

解：设总平均成绩是 x 环，乙组人数为 y 人，

由乙平均成绩=甲平均成绩×（1+30%），得甲平均成绩：$\frac{171.6}{1.3}=132$，

$\frac{171.6\times y+132\times 1.2y}{2.2y}=150$。选 C。

例 1.46（2003.1）车间共有 40 人，某技术操作考核的平均成绩为 80 分，其中男工成绩为 83 分，女工成绩为 78 分，该车间有女工（D）。

A．16 人　　B．18 人　　C．20 人　　D．24 人　　E．28 人

解：设女工人数为 x 人，则 $80\times 40=78x+83\times(40-x)\Rightarrow x=24$。选 D。

六．　年龄问题

【提示】关键选好参照年份，注意：（1）年龄差恒定；（2）年龄同步增长。

例 1.47 母女俩今年的年龄共 35 岁，再过 5 年，母亲的年龄是女儿的 4 倍，母亲今年多少岁？C

A.29　　B.30　　C.31　　D.32　　E.33

解：设母亲今年 x 岁，则 $4\times(35-x+5)=x+5\Rightarrow x=31$。选 C。

例 1.48 哥哥 5 年前的年龄等于弟弟 7 年后的年龄，哥哥 4 年后的年龄与弟弟 3 年前的年龄和是 35 岁，求哥哥今年的年龄？B

A.22　　B.23　　C.24　　D.25　　E.26

解：设哥哥今年 x 岁，弟弟今年 y 岁，则

$x-5=y+7\Rightarrow y=x-12$，$x+4+y-3=35\Rightarrow x=23$。选 B。

例 1.49 甲对乙说："我在你这个岁数时，你才 4 岁。"乙对甲说："我到你这个岁数时，你已经退休 7 年了。"则甲现在是（C）岁。

A.44　　B.45　　C.46　　D.48　　E.50

解：设甲今年 x 岁，乙今年 y 岁，则

$y-(x-y)=4\Rightarrow x=2y-4$，$x+x-y=67\Rightarrow x=46$。选 C。

七． 多比例问题

【提示】先求最简单地整数比，再根据份额得到对应数值。

例 1.50 2005 年，我国甲省人口是全国人口的$c\%$，其生产总值占国内生产总值的$d\%$；乙省人口是全国人口的$e\%$，其生产总值占国内生产总值的$f\%$，则 2005 年甲省人均生产总值与乙省人均生产总值之比是（D）。

A. $\frac{cd}{ef}$　　B. $\frac{ce}{df}$　　C. $\frac{cf}{de}$　　D. $\frac{de}{cf}$

E.以上结果都不对

解：设国内生产总值为A，全国人口为B。

则甲省人均生产总值为$\frac{A\times d\%}{B\times c\%}$；乙省人均生产总值为$\frac{A\times f\%}{B\times e\%}$。

两者之比为 $\frac{A\times d\%}{B\times c\%}\div\frac{A\times f\%}{B\times e\%}=\frac{d}{c}\div\frac{f}{e}=\frac{de}{cf}$。选 D。

例 1.51（2001.1）一公司向银行借款 34 万元，欲按$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$的比例分配给下属甲、乙、丙三车间进行技术改造，则甲车间应得（D）。

A.4 万元　　B. 8 万元　　C. 12 万元　　D. 18 万元　　E. 17 万元

解：甲：乙：丙$=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}=9:6:2(\times 18)$，故甲：$\frac{9}{17}\times 34=18$。选 D。

例 1.52（2002.1）奖金发给甲、乙、丙、丁 4 人，其中$1/5$发给甲，$1/3$发给乙，发给丙的奖金正好是甲、乙奖金差的 3 倍，已知发给丁 200 元，则这笔奖金应为（D）。

A.1500 元　　B. 2000 元　　C. 2500 元　　D. 3000 元

解 1：设总奖金为$15x(3\times 5=15)$，则

$3x+5x+3\times(5-2)x+200=15x\Rightarrow x=200$， $15x=3000$；

解 2：总奖金×对应比例=部分奖金，所以

$200=总奖金\times\left[1-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right)\right]$，总奖金=3000。选 D。

例 1.53（2003.1）某公司得到一笔贷款共 68 万元用于下属三个工厂设备改造，结果甲、乙、丙三个工厂按比例分别得到 36 万元、24 万元、8 万元。D

（1）甲、乙、丙三个工厂按$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$的比例分配贷款；

（2）甲、乙、丙三个工厂按$9:6:2$的比例分配贷款。

解：$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}=9:6:2$，所以（1）和（2）等价且都具备充分性。选 D。

例 1.54（2003.1）所得税是工资加奖金总和的 30%，如果一个人的所得税为 6810 元，奖金 3200 元，则他的工资为（C）。

A. 12000 元　B. 15900 元　C. 19500 元　D. 25900 元　E. 62000 元

解：工资加奖金=$\frac{6810}{30\%}=22700$，工资=$22700-3200=19500$。选 C。

例 1.55（2003.10）某工厂人员由技术人员、行政人员和工人组成，共有男职工 420 人，是女职工的$1\frac{1}{3}$倍，其中行政人员占全体职工的 20%，技术人员比工人少$\frac{1}{25}$，那么该工厂有工人（C）。

A. 200 人　B. 250 人　C. 300 人　D. 350 人　E. 400 人

解：先易后难，女职工：$420\div\frac{4}{3}=315$，技术：工人=24：25，

工人：$(420+315)\times(1-20\%)\times\frac{25}{49}=300$。选 C。

例 1.56 父亲与儿子体重之比恰为母亲与女儿体重之比，已知父亲与儿子体重之和为 125kg，母亲与女儿体重之和为 100kg，儿子比女儿重 10 kg，那么儿子体重是（B）。

A. 40kg　　B. 50kg　　C. 55kg　　D. 60kg　　E. 65kg

解：$\frac{父}{子}=\frac{母}{女}$，则由合比定理$\frac{父+子}{子}=\frac{母+女}{女}$，令儿子体重$x$，则

$\frac{125}{x}=\frac{100}{x-10}\Rightarrow x=50$。选 B。

八．　分段表示问题

【提示】对不同的范围，取值不同，留心分段点两端的变化。

例 1.57 国家税务部门规定个人稿费纳税办法是：不超过 800 元的不交税；超过 800 元但不超过 4000 元的按超过 800 元部分的 14%纳税；超过 4000 元的按全稿酬的 11%纳税。已知一人纳税 550 元，则此人稿费为（C）元。

A. 4500　　B. 4800　　C. 5000　　D. 5400　　E. 3500

解：先判断区间（4000-800）×14=448，所以此人稿费超过 4000 元，

稿费为：$\frac{550}{11\%}=5000$。选 C。

例 1.58 自来水公司的水费计算方法是：每户每月用水不超过 5 吨，每吨 4 元，超出 5 吨部分每吨收取较高的费用。已知 9 月份张家的用水量比李家多 50%，张家和李家水费分别是 90 元和 55 元，则超出 5 吨部分水费标准是（E）。

A.5 元/吨　B. 5.5 元/吨　C. 6 元/吨　D. 6.5 元/吨　E. 7 元/吨

解：90 元和 55 元都大于 20 元，设李家用水 x 吨，超出 5 吨部分水费标准是 u 元/吨，则

$0.5xu = 90 - 55 = 35 \Rightarrow xu = 70$，$(x-5)u = 55 - 20 = 35 \Rightarrow u = 7$。选 E。

第 2 章　代数

【大纲考点】整式、分式及其运算。

【备考要点】考察代数式的概念、公式、原理，进行数、式、方程的正确运算和变形。

2.1 整式及其加法与乘法

单项式：　由数与字母（未知量）组成的代数式，如$3x^m y^n z^p$，单独一个数或一个字母也是单项式。其中字母前的数称为单项式的系数，所有字母的指数和称为单项式的次数。在$3x^m y^n z^p$中，3是系数，$m+n+p$是次数。

多项式：几个单项式的和叫做多项式。其中每个单项式称为多项式的项，不含字母的项为常数项（次数为零），次数最高项的次数就是该多项式的次数。

整式：单项式和多项式统称整式。

2.2 分解因式

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做分解因式（因式分解）

（1）因式分解的实质是一种恒等变形，化和为积。

（2）因式分解与整式乘法是互逆的。

（3）在因式分解的结果中，每个因式必须是整式。

（4）因式分解要分解到不能分解为止。

因式分解的基本方法

（1） 运用公式法；（2）分组分解法；（3）十字相乘法。

因式分解的一般步骤为一提二套三分组。

7+ 3 个乘法公式

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$，

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$，

$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\ \mu\ ab+b^2)$，

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$，

$a^2+b^2+c^2\pm ab\pm bc\pm ca=\frac{1}{2}\left[(a\pm b)^2+(b\pm c)^2+(c\pm a)^2\right]$,

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\Lambda\ +ab^{n-2}+b^{n-1})$

特别　$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\Lambda\ +x+1)$

对一元 **n** 次实系数多项式　$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\Lambda\ +a_{n-1}x+a_n$，

令　$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\Lambda\ +a_{n-1}x+a_n=0$，

必　$a_0\bar{x}^n+a_1\bar{x}^{n-1}+\Lambda\ +a_{n-1}\bar{x}+a_n=0$。

故一元 **n** 次实系数多项式的根若为复数，必呈共轭形式出现，即总可以分解为若干个一次实系数因式 $x-p$ 和二次实系数因式 $x^2+px+q(p^2-4q<0)$ 的乘积，其中二次实系数因式对应一对共轭复根。

2.3 整式的除法

定理 2.2.1 对任意两个实系数多项式 $f(x),g(x)$，其中 $g(x)$ 不是零多项式。一定存在实系数多项式 $Q(x),R(x)$，使得

$$f(x)=Q(x)g(x)+R(x)，$$

这里 $R(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数，且 $Q(x),R(x)$ 是唯一的。

整式的除法的做法—竖式辗转相除法。

若余式$R(x)=0$，则称$g(x)$整除$f(x)$，此时称$g(x)$是$f(x)$的一个因式。类似于整数性质中公约数和最大公约数的概念，多项式亦有公因式和最大公因式的概念。即若$h(x)$同时整除$f(x)$与$g(x)$，$h(x)$就是$f(x)$与$g(x)$的一个公因式，而当$f(x)$与$g(x)$的任何公因式均为$h(x)$的因式时，$h(x)$就是$f(x)$与$g(x)$的最大公因式。同样可定义多项式的最小公倍式或两个多项式互质等概念。

2.4 分式（有理多项式）

设$f(x),g(x)$是两个多项式，形如$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（其中$g(x)\neq 0$）的式子称为分式。如果$g(x)$整除$f(x)$，则$\dfrac{f(x)}{g(x)}$即可简化为多项式。当$f(x)$与$g(x)$有公因式时，可以约分

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)h(x)}{g_1(x)h(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

不能约分的分式称为既约分式（最简分式）（此时$f_1(x)$与$g_1(x)$互质）。

2.5 根式

称$\sqrt[n]{a}(n\geq 1)$为根式，它满足$x^n=a$，这里的x为a的n次方根。

乘积的方根　$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}(a\geq 0,b\geq 0)$。

分式的方根　$\sqrt[n]{a/b}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}(a\geq 0,b\geq 0)$。

根式的乘方　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}(a\geq 0)$。

根式的化简　$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}(a\ge 0)$，$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}(a>0)$。

2.6 题型归纳

【题型 1】整式计算

【提示】整式计算题是其它题型的基础,其本身题型比较灵活,在大多数情形,可以从结论入手,逐步向条件靠近.

例 2.1 设 p 为正数，则 $x^2+px-99=[\ ]$。C

A．$(x-9)(x-11)$　B．$(x+9)(x-11)$　C．$(x-9)(x+11)$　D．$(x+9)(x+11)$

E.以上结果都不对

解：一元二次方程中常数项为负，只能考虑 B，C；$p>0$，故选 C。

例 2.2 已知 $x-y=5$ 且 $z-y=10$，则 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=[\ ]$。B

A．50　B．75　C．90　D．100　E．105

解：　$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$

$=\frac{1}{2}\left[5^2+10^2+(z-y+y-x)^2\right]=\frac{1}{2}[25+100+25]=75$。选 B。

例 2.3 对任意实数，等式 $ax-4x+5+b=0$ 恒成立，则 $(a+b)^{2010}=$（B）。

A．0　B．1　C．2^{1005}　D．2^{2010}　E．2

解 1：$ax-4x+5+b=(a-4)x+(b+5)=0$，对任意实数恒成立必

$a-4=0\Rightarrow a=4,b+5=0\Rightarrow b=-5$，所以 $(a+b)^{2010}=(4-5)^{2010}=1$。选 B。

解 2：取 $x=0$，则 $b=-5$，再取 $x=1$，则 $a=4$。

例 2.4（2002.1）a,b,c 是不全相等的实数，若 $x=a^2-bc$，$y=b^2-ac$，$z=c^2-ab$，则 x,y,z（B）。

A. 都大于零　　B. 至少一个大于零　　C. 至少一个小于零

D. 都不小于零　　E. 以上都不对

解：$x+y+z=a^2+b^2+c^2-bc-ac-ca=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]>0$，

则必 x,y,z 中至少一个大于零。选 B。

【题型 2】分式化简

【提示】分式化简的关键在于分解因式，因式分解是整式和分式计算的基础.

例 2.5 将 $\frac{4x^2+3x-4}{x^4-1}$ 化简为部分分式之和。

解：因为 $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$，故可设

$$\frac{4x^2+3x-4}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1},$$

通分后比较系数解出 $A=B=\frac{3}{4}$，$C=-\frac{3}{2},D=4$。

例 2.6 当 $x\neq 1$ 和 $x\neq -2$ 时，$\frac{x-1}{x^2+3x+2}=\frac{m}{x+1}+\frac{n}{x+2}$ 恒成立，则[ ]。A

A. $m=-2$，$n=3$　　B. $m=-3$，$n=2$

C. $m=2$，$n=-3$　　D. $m=3$，$n=-2$

E. 以上结果都不对

解：等式 $\frac{x-1}{x^2+3x+2}=\frac{m}{x+1}+\frac{n}{x+2}=\frac{(m+n)x+2m+n}{(x+1)(x+2)}$ 在 $x\neq 1$ 和 $x\neq -2$ 时恒成立，意即 $\begin{cases} m+n=1 \\ 2m+n=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m=-2 \\ n=3 \end{matrix}$。选 A。

【题型 3】解分式方程

【提示】分式方程的解法(1)找出若干个分母(整式)的最小公倍式；

等式两端同乘此最小公倍式后化为整式方程求解.

(2)解决增根问题：分式方程本身隐含分母不为零的条件,当分式方程转化为整式方程求解后,方程中未知量允许取值的范围扩大了,如果转化后整式方程的根恰好使原分式方程的分母为零,就是增根.解决增根问题之道是验根后排除.

例 2.7（2001.1）已知方程 $x^3+2x^2-5x-6=0$ 的根为 $x_1=-1,x_2,x_3$，则 $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=$（A）。

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{3}$　　E. $\frac{1}{2}$

解：题设 $x+1$ 是 x^3+2x^2-5x-6 的因式，所以

$$\begin{array}{r} x^2+x-6 \\ x+1\overline{\big)\,x^3+2x^2-5x-6} \\ \underline{x^3+x^2} \\ x^2-5x \\ \underline{x^2+x} \\ -6x-6 \\ \underline{-6x-6} \\ 0 \end{array}$$

即 $x^3+2x^2-5x-6=(x+1)(x-2)(x+3)$，所以 $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$。选 A。

例 2.8 解分式方程：$\frac{2x^2-2}{x-1}+\frac{6x-6}{x^2-1}=7$，$x=$（B）

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1 或 $\frac{1}{2}$　　D. -1　　E. $-\frac{1}{2}$

解 1：分母的最小公倍式为 x^2-1（根为 $x=\pm1$），以此同乘等式两侧得

$$2(x^2-1)(x+1)+6(x-1)-7(x^2-1)=(x-1)\left[2(x+1)^2-7(x+1)+6\right]=0,$$

解得三个根 $1,1,\frac{1}{2}$，显然 1 是增根。选 B。

解 2：设$\frac{x^2-1}{x-1}=y$，则原方程化为$2y+\frac{6}{y}=7$，去分母得$2y^2-7y+6=0$，

解得$2,\frac{3}{2}$，当$y=2$，$x=1$，是增根；$y=\frac{3}{2}$，$x=\frac{1}{2}$为原方程的根。

【题型 4】有关恒等式的考题

【提示】恒等式的题目一般用综合法与演绎法处理,前者从结论出发,往前追溯条件;后者从条件入手,一步步演绎出结论.

例 2.9 若$x,y,z\in R$，有$x+y+z=0$。

（1）$a^xb^yc^z=a^yb^zc^x=a^zb^xc^y=1$；（2）$a,b,c$均大于 1。C

解 1：由$a^xb^yc^z=1$，两边取自然对数，得$x\ln a+y\ln b+z\ln c=0$，同样有$y\ln a+z\ln b+x\ln c=0$，$z\ln a+x\ln b+y\ln c=0$，三式相加

$(\ln a+\ln b+\ln c)(x+y+z)=0$。条件（1）显然不充分，如$a=b=c=1$，则$\ln a+\ln b+\ln c=0$，结合（2），此时$\ln a+\ln b+\ln c>0$，所以$x+y+z=0$。

解 2：由$a^xb^yc^z=a^yb^zc^x=a^zb^xc^y=1\Rightarrow(abc)^{x+y+z}=1$，结合（2）可得$x+y+z=0$。选 C。

例 2.10 已知$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$，$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$，那么$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=$（D）。

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 9　　E. 16

解：对$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$两边平方得$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ac}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}\right)=9$，

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0\Rightarrow ayz+bxz+cxy=0$，又

$\left(\frac{xy}{ac}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}\right)=\frac{ayz+bxz+cxy}{abc}=0$，所以$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=9$。选 D。

【题型 5】考察余式定理

【提示】一阶余式定理为:多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)$ 的余式为 $f(a)$;

推论: $f(x)$ 除以 $(ax-b)$ 的余式为 $f\left(\frac{b}{a}\right)$.

例 2.11 设 $f(x)$ 为实系数多项式，以 $x-1$ 除之，余数为 9；以 $x-2$ 除之，余数为 16，则 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的余式为（）。

A. $7x+2$　　B. $7x+3$　　C. $7x+4$　　D. $7x+5$　　E. $2x+7$

解 1：题设 $f(1)=9$， $f(2)=16$，故可设 $f(x)=(x-1)(x-2)q(x)+ax+b$，

$\begin{cases} f(1)=a+b=9, \\ f(2)=2a+b=16. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=7, \\ b=2. \end{cases}$ 。选 A。

解 2：设 $f(x)=(x-1)(x-2)q(x)+a(x-1)+9$，代入 $f(2)=a+9=16 \Rightarrow a=7$，余式为 $7x+2$ 。

例 2.12 设多项式 $f(x)$ 除以 $x-1$， x^2-2x+3 的余式分别为 $2,4x+6$，则 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2-2x+3)$ 的余式为（）。

A. $4x^2+12x-6$　　B. $-4x^2+12x-6$　　C. $-4x^2+12x+6$

D. $-4x^2-12x-6$　　E. $4x^2-12x-6$

解：设 $f(x)=(x-1)(x^2-2x+3)q(x)+a(x^2-2x+3)+4x+6$，代入

$f(1)=a(1-2+3)+4+6=2 \Rightarrow a=-4$，所以余式为 $-4x^2+12x-6$ 。选 B。

【题型 6】考察因式定理

【提示】一阶因式定理为: $(ax-b)$ 为 $f(x)$ 的因式 $\Leftrightarrow f\left(\frac{b}{a}\right)=0 \Leftrightarrow f(x)$ 能被 $(ax-b)$ 整除.

例 2.13 若三次多项式 $g(x)$ 满足 $g(-1)=g(0)=g(2)=0$， $g(1)=4$，多项式 $f(x)=x^4-x^2+1$，则 $3g(x)-4f(x)$ 被 $x-1$ 除的余式为（）。

A. 3　　B. 5　　C. 8　　D. 9　　E. 11

解：由题设 $g(x)=ax(x+1)(x-2)$，代入 $g(1)=4$，得 $a=-2$，所求余式 $F(x)=3g(1)-4f(1)=12-4=8$。选 C。

例 2.14 $f(x)$ 是二次多项式，且 $f(2004)=1$， $f(2005)=2$， $f(2006)=7$，则 $f(2008)=$（）。

A. 21　　B. 23　　C. 25　　D. 28　　E. 29

解：设 $f(x)=a(x-2004)(x-2005)+b(x-2004)+1$，

$f(2005)=b+1=2\Rightarrow b=1$， $f(2006)=2a+2b+1=7\Rightarrow a=2$，所以

$f(2008)=2(2008-2004)(2008-2005)+(2008-2004)+1=29$。选 E。

【题型 7】考察循环小数

【提示】将循环小数化为分数，是用一个循环节个数的若干个 9 作为分母，一个循环节的数字是分子.

例 2.15 纯循环小数 $0.\dot{a}\dot{b}\dot{c}$ 写成最简分数时，分子与分母之和是 58，这个循环小数是（）。

A. $0.\dot{5}6\dot{7}$　　B. $0.\dot{5}3\dot{7}$　　C. $0.\dot{5}1\dot{7}$　　D. $0.\dot{5}6\dot{9}$　　E. $0.\dot{5}6\dot{2}$

解：设 $0.\dot{5}6\dot{7}=\dfrac{abc}{999}$，由 $999=3^3\times 37$，纯循环小数，分母大于分子，必分母大于 29，只能为 37，分子 58-37=21， $\dfrac{21}{37}=\dfrac{21\times 27}{37\times 27}=\dfrac{567}{999}$。选 A。

此题亦可直接验证。

第3章　　集合、映射和函数

【大纲考点】集合、函数的概念、性质及应用。

【备考要点】集合的概念与应用，一元二次函数的概念、性质和图像（抛物线），指数函数、对数函数的概念、性质和图像及其应用。

3.1 集合

1 集合的概念

集合—具有某种特定性质的具体或抽象的对象汇集成的总体。

表示　A,B,C 等。集合中的对象称为元素，表示　a,b,c 等。

$a \in A$ 表示 a 是 A 中元素，　$a \notin A$ 表示 a 不是 A 中元素。

几个常用的数集

N — 自然数集；

Z — 整数集，　Z_+ —正整数集，Z_- —负整数集；

Q — 有理数集；

R — 实数集，　R_+ —正实数集，R_- —负实数集；

C — 复数集。

集合的表示方式　（1）列举法（枚举法），（2）描述法。

空集— 不含任何元素的集合，记为 $\varnothing$。

2 集合的包含关系

$A \subseteq B$ 示任何 A 的元素均为 B 的元素，此时称 A 是 B 的子集。

空集是任何集合的子集。

$A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$

3 集合的基本运算。

$A \cap B$— A与B的交集。

$A \cup B$— A与B的并集。

$\overline{A} = C_I A$— A关于I的补集。

交集、并集和补集还可以进行组合运算。

一般集合等式需要证明。如$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$。

集合在实数域中常表示为区间，寻求下节所定义的函数的定义域一般为确定区间（集合）的交集。

【题型 1】集合问题

【提示】集合问题的求解，多个集合的交集是关键

例3.1 100个学生中，88人有手机，76人有电脑，其中有手机没有电脑的共15人，则这100个学生中有电脑但没有手机的共有[ ]人。 D

A. 25　　B. 15　　C. 5　　D. 3　　E. 7

解：既有手机又有电脑的学生为 $88-15=73$（人），那么有电脑没有手机的学生为$76-73=3$（人），没有手机没有电脑的学生为$12-3=9$（人）。自然选D。

例 3.2 某公司员工中，拥有本科毕业证、英语 6 级通过证、汽车驾驶证的人数分别为 130，110，90。又知只有一种证的人数 140，三证齐全人数 30，则恰有两证的人数为（B）。

A. 45　　B. 50　　C. 52　　D. 65　　E. 70

解：$\dfrac{130+110+90-140-30\times 3}{2}=50$。选 B。

3.2 映射和函数

1 映射的概念

映射— A，B 两个集合，f 为一对应关系（对应法则），对于任何 A 中元素，均有 B 中唯一的元素与之对应。记作 $f: A \to B$。

在映射中，若 $a \in A$，B 中与之对应的元素是 b，称 b 为 a 的象，a 为 b 的原象。

注：可以多对一，不可一对多。

一一映射— 满足（**1**）A 中不同的元素，在 B 中有不同的象；

（**2**）B 中每个元素都有原象。

2 函数—数集之间的映射（特殊的映射）

记为 $y = f(x), \quad x \in A, \quad y \in B$，

其中 x 称为自变量，y 是函数值，又称因变量。A 称为函数 $f(x)$ 的定义域，函数值的集合 $\{y | y = f(x), x \in A\}$ 成为函数 $f(x)$ 的值域，值域包含于 B。

一般函数 $f(x)$ 的定义域若不作说明，则使函数有意义的 x 的取值范围就是定义域

关于二次函数的讨论 $y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad x \in R, \quad a \neq 0$，

当 $a > 0$ 时，值域是 $\left\{ y \middle| y \geq \dfrac{4ac - b^2}{4a} \right\}$，当 $a < 0$ 时，值域是 $\left\{ y \middle| y \leq \dfrac{4ac - b^2}{4a} \right\}$。

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

$$f'(x) = 2ax + b, \quad f''(x) = 2a \text{。}$$

二次函数的图象是抛物线，抛物线的对称轴是$x=-\frac{b}{2a}$。

当$a>0$时抛物线开口向上，图象的形状是凹函数；

当$a<0$时抛物线开口向下，图象的形状是凸函数。

【题型 2】二次函数的性质与应用

【提示】二次函数及与考试其它内容综合出题是每年都有的内容,这里先指出基本性质,进一步在方程与不等式中详细讨论.

例 3.3 抛物线$y=-x^2+4x-3$的图像不经过$[B]$。

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

解：抛物线开口向下，总经过三、四象限。由

$$y=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$$

找到顶点坐标为$(2,1)$，在第一象限。只能不经过第二象限。

注：知识点考察抛物线的性质（图像），开口方向、顶点坐标等。

3 反函数

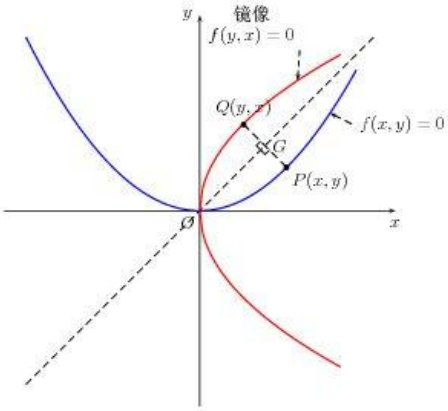
设函数$y=f(x),x\in A$的值域是B。如果映射$f:A\to B$是一个一一对应，那么任给B中的一个元素y（映射f的象），可以在A中找到唯一的x（映射f的原象）与之对应，这样又可以确定B到A的一个函数，把它称为$y=f(x)$的反函数，记为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in B。$$

由于习惯上用x表示自变量，所以$y=f(x),x\in A$的反函数改写成

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in B，$$

它的图象与$y=f(x),x\in A$的图象关于直线$y=x$对称。



4 函数的单调性、奇偶性和周期性

定义 **3.2.3** （**1**）如果函数 $y=f(x)$ 在其定义域的某个子集 I 上满足：对任意的 $x\in I$，当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），就称 $f(x)$ 在 I 上是增函数（或减函数）。增函数和减函数都称为单调函数。

（**2**）如果函数 $y=f(x)$ 对其定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$），就称函数 $f(x)$ 是偶函数（或奇函数）。

（**3**）如果存在一个非零常数 T，使得函数 $y=f(x)$ 对其定义域内任意一个 x，都有 $f(x+T)=f(x)$，就称 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为函数的周期。如果一个周期函数所有周期中存在一个最小的正数，这个正数称为最小周期。

单调函数在其定义域上一定存在反函数。

5 幂函数、指数函数和对数函数

指数的概念（$a\in R,\quad m,n\in Z_+$）

（**1**）$a^n=a\times a\times\Lambda\times a$（$n$ 个 a 相乘）；

（**2**）$a^0=1(a\neq 0)$；

（3） $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[n]{a^m}(a\geq 0,n>1)$；

（4） $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}(a\neq 0,n>0)$ 。

指数的运算规则

（1） $a^m a^n=a^{m+n}$；

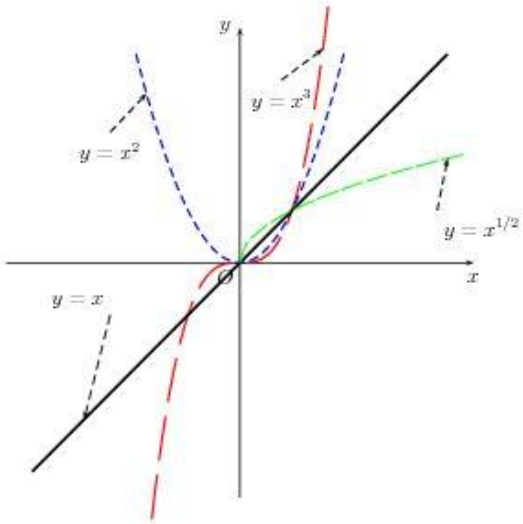
（2） $a^m\div a^n=a^{m-n}$；

（3） $(a^m)^n=a^{mn}$；

（4） $(ab)^m=a^m b^m$；

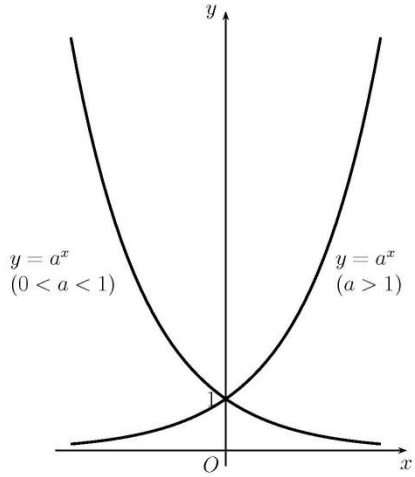
（5） $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}(b\neq 0)$ 。

幂函数的一般形式 $y=x^n,\quad n\in Q$ 。



指数函数的一般形式 $y=a^x,\quad a>0,a\neq 1,\quad x\in R$，

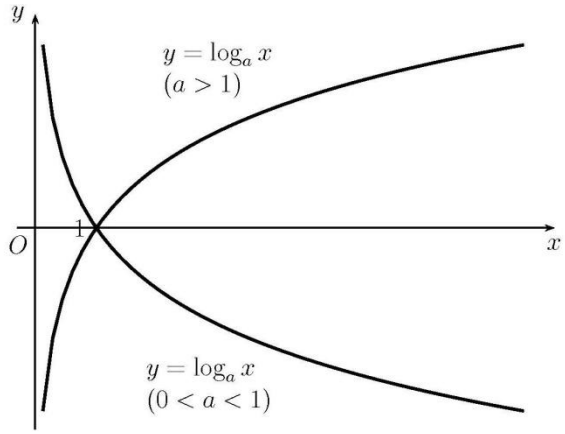
当 $a>1$ 时， $y=a^x$ 是增函数；当 $0<a<1$ 时， $y=a^x$ 是减函数。



对数函数的一般形式 $y=\log_a x,\quad a>0,a\neq 1,\quad x\in R_+$，

当$a>1$时，$y=\log_a x$是增函数；当$0<a<1$时，$y=\log_a x$是减函数。

指数函数与对数函数互为反函数，其图象关于直线$y=x$对称。



对数的运算规则$(a>0,a\neq 1,\quad M>0,N>0)$

（1）$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

（2）$\log_a(\frac{M}{N})=\log_a M-\log_a N$；

（3）$\log_a(M^n)=n\log_a M$；

（4）$\log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$；

（5）$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}$（换底公式）；

（**6**）$\log_a a=1,\quad a^{\log_a M}=M$。

自然对数$y=\log_e x=\ln x$；常用对数$y=\log_{10}x=\lg x$。

注:初等数学中还有三角函数和反三角函数,不在考试范围之列.

【题型 3】幂函数、指数函数和对数函数

【提示】幂函数的性质与图像在无理函数方程求解中有应用;而指数函数和对数函数是新增考点,应与其它知识点结合出题.

例 3.4 已知$a=\log_m\frac{x+y}{2}$，$b=\frac{1}{2}(\log_m x+\log_m y)$，$c=\frac{1}{2}\log_m(x+y)$，则$c\ge b\ge a$。

（1）$x>2,y>2$；（2）$0<m<1$。C

解：$b=\log_m\sqrt{xy}$，$c=\log_m\sqrt{x+y}$，故需比较$\frac{x+y}{2},\sqrt{xy},\sqrt{x+y}$的大小，

显然$\frac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$，另外$\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<1\Rightarrow\sqrt{xy}>\sqrt{x+y}$，结合$0<m<1$时$y=\log_m x$是减函数，所以选 C。

例 3.5 $a=1$。

（1）$a=(\lg 5)^3+(\lg 2)^3+3\lg 5\bullet\lg 2$；

（2）$a=\lg 2\bullet\lg 50+\lg 5\bullet\lg 20-\lg 100\bullet\lg 5\bullet\lg 2$。D

解：（1）$a=(\lg 5)^3+(\lg 2)^3+3\lg 5\bullet\lg 2$

$=(\lg 5+\lg 2)\left[(\lg 5)^2-\lg 5\bullet\lg 2+(\lg 2)^2\right]+3\lg 5\bullet\lg 2$

$=(\lg 5)^2+(\lg 2)^2+2\lg 5\bullet\lg 2=(\lg 5+\lg 2)^2=1$，充分条件；

（2）$a=\lg 2\bullet\lg 50+\lg 5\bullet\lg 20-\lg 100\bullet\lg 5\bullet\lg 2$

$=\lg 2\bullet(2-\lg 2)+(1-\lg 2)\bullet(1+\lg 2)-2\bullet(1-\lg 2)\bullet\lg 2=1$，充分条件。选 D。

例 3.6 函数 $y=\dfrac{\sqrt{\log_9(x^2-4x-12)-1}}{\lg(x-10)}$ 的定义域是（E）。

A. $x<-3$　　B. $x>10$　　C. $-2<x<10$　　D. $x>7$　　E. $x>10$ 且 $x\neq 11$

解：这里结合了对数的真数大于零，平方根内大于等于零及分母不为零等概念。所以

$$\begin{cases} x^2-4x-12>0, \\ \log_9(x^2-4x-12)-1\geq 0, \\ x>10, \\ x-10\neq 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-6)(x+2)>0, \\ x^2-4x-12\geq 9, \\ x>10, \\ x\neq 11. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-2\vee x>6, \\ x<-3\vee x>7, \\ x>10, \\ x\neq 11. \end{cases}$$ 。选 E。

例 3.7 已知 $2^x=3^y=5^z$，且 x,y,z 都是正数，则 A

A. $3y<2x<5z$　　B. $2x<3y<5z$　　C. $2x<5z<3y$　　D. $5z<2x<3y$

E. $5z<3y<2x$

解：由 $2^x=3^y=5^z$，可设 $x\lg 2=y\lg 3=z\lg 5=k$，x,y,z 都是正数，必 $k>0$。

所以 $x=\dfrac{k}{\lg 2}$，$y=\dfrac{k}{\lg 3}$，$z=\dfrac{k}{\lg 5}$，

进一步 $2x-3y=\dfrac{\lg 9-\lg 8}{\lg 2\bullet\lg 3}k>0$，$2x-5z=\dfrac{\lg 25-\lg 32}{\lg 2\bullet\lg 5}k<0$，

得到 $3y<2x<5z$。选 A。